



TITLE:

# リヤプノフ数と双曲性 : Katokの結果から (確定系における不規則現象と力学系理論)

AUTHOR(S):

笹野, 一洋

---

CITATION:

笹野, 一洋. リヤプノフ数と双曲性 : Katokの結果から (確定系における不規則現象と力学系理論). 数理解析研究所講究録 1981, 413: 54-66

ISSUE DATE:

1981-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102440>

RIGHT:

リヤプノフ数と双曲性 — Katok の結果から —

東大 理 笹野一洋

A. Katok, LYAPUNOV EXPONENTS, ENTROPY AND PERIODIC ORBITS FOR  
DIFFEOMORPHISMS, Publ. Math. I.H.E.S., 51 (1980), 137-173.

を紹介する。上の文献は、8月頃 Publish され、日本にも着いているので、ここでは、outline を述べるに留める。

$M$  を compact な  $n$ -次元多様体とし、滑らかな Riemannian metric を入っている  $M$  とする。  $f: M \rightarrow M$  を  $C^1$ -diffeo. とする。

def.  $x \in M$  における接ベクトル  $v \in T_x M$  に対して、

$$\chi^+(v, f) \equiv \limsup_n \frac{1}{n} \log \|df^n v\|$$

を、 $v$  の upper Lyapunov exponent とする。

この時、次の事実がよく知られている。

Th. 各  $x \in M$  について、  $\chi(x) \in \{1, 2, \dots, n\}$ ,  $\chi_1(x) < \chi_2(x) < \dots < \chi_{\chi(x)}(x)$  なる実数達、  $\phi = L_0(x) \subsetneq L_1(x) \subsetneq \dots \subsetneq L_{\chi(x)}(x) =$

$T_x M$  ( $T_x M$  の subspaces  $L_i(x)$  による filtration) が存在して,

$$\forall v \in L_i(x) \setminus L_{i-1}(x) ; \chi^+(v, f) = \lambda_i(x).$$

をみたす。

このとき,  $k_i(x) \equiv \dim L_i(x) - \dim L_{i-1}(x) \in \mathbb{R}$ ,  $i^{\text{th}}$  exponent  $\lambda_i(x)$  の multiplicity となる。

Th. (Oseledec's Multiplicative Ergodic Theorem) [O]

(i)  $\exists A \subset M$ : a.t. (a)  $\forall \mu = f$ -invariant Borel probability measure on  $M$  について,  $\mu(A) = 1$ , (b).  $\forall x \in A$ ,  $\forall v \in T_x M$  について,

$$\exists \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|df^n v\| \quad (\text{これは } \underline{\text{Lyapunov exponent}} \text{ となる}).$$

(ii)  $\chi(x)$ ,  $\lambda_i(x)$ ,  $k_i(x)$  は,  $\mu$  に関して可測な  $f$ -invariant function である。

(iii) とくに  $\mu$  が ergodic のとき,  $\chi(x)$ ,  $k_i(x)$ ,  $\lambda_i(x)$  は全て  $\mu$ -a.e. で定数になる。このとき, これらをそれぞれ,  $\chi^\mu$ ,  $k_i^\mu$ ,  $\lambda_i^\mu$  と書くことにする。 ( $\mu$ -a.e. で定数故,  $\lambda_i^\mu$  のことである。

リヤプノフ数 と呼ぶことがある。)

def.  $\mu$ -a.e.  $x$  について,  $\lambda_i(x) \neq 0$  ( $\forall i$ ) のとき,  $\mu \in$  non-zero Lyapunov exponents を持つ測度 となる。

## I. 主結果

$M \in$  同上とし,  $f: M \rightarrow M \in C^{1+d}$ -diffeo. ( $d > 0$ ) とする。(但し  $f$  が  $C^2$  ( $2 \leq 2$ ) のときは,  $d=1$  と考える)。即ち,

$f$  は  $C^1$ -diffeo. で、 $X$  の微分  $df$  が  $\alpha$  を指数とする Hölder 連続になるとする。  $\text{Per}(f)$  で  $f$  の周期点全体を；  $P_n(f)$  で  $f^n$  の固定点の個数を；  $h(f)$  で、 $f$  の位相的エントロピーを；  $h_\mu(f)$  で、 $f$  の  $\mu$  に関する測度論的エントロピー (Kolmogorov-Sinai Invariant) を表わすとする。

Th. A.  $\mu$  が non-zero Lyapunov exponent を持つ  $f$ -不変測度ならば、  
 $\text{supp } \mu (= \mu \text{ の support }) \subset \overline{\text{Per}(f)}$ 。

Th. B. Th. A の仮定のキとで、さらに、 $\mu$  が ergodic で、その support が 1 つの周期軌道となるようなとき、ある topological Markov shift と同型な  $f$ -不変双曲型開集合が存在する。さらに、 $h(f) > 0$ 。

Th. C.  $M$  が 2 次元で、 $h(f) > 0$  ならば、(Lyapunov exp. に関係なく) Th. B. の様な双曲型開集合が存在する。

Th. D. Th. A の仮定のキとに、

$$\limsup \frac{1}{n} \log P_n(f) \geq h_\mu(f)。$$

Th. E.  $M$  が 2 次元のとき、(Lyapunov exp. に関係なく)

$$\limsup \frac{1}{n} \log P_n(f) \geq h(f)。$$

## II. Main Lemma.

def.  $\kappa > 0$ ,  $l \geq 1$  に対して、 $M$  の部分集合  $\Lambda_{\kappa, l}$  を次の様に定める；

$$\Lambda_{\alpha, l} \equiv \left\{ \begin{array}{l} x \in M; \quad \exists \text{ decomposition } T_x M = E_x^s \oplus E_x^u \text{ s.t.} \\ \text{for } \forall n \in \mathbb{Z}^+ = \{0, 1, 2, \dots\}, \forall m \in \mathbb{Z}; \\ \textcircled{1} \forall v \in df_x^m E_x^s \quad \|df_{f_x^m} v\| \leq l \cdot e^{-n\alpha} \cdot e^{10^{-3}\alpha(n+|m|)} \|v\| \\ \quad \|df_{f_x^m}^{-n} v\| \geq \bar{l} \cdot e^{n\alpha} \cdot e^{-10^{-3}\alpha(n+|m|)} \|v\| \\ \textcircled{2} \forall v \in df_x^m E_x^u: \quad \|df_{f_x^m} v\| \geq \bar{l} \cdot e^{n\alpha} \cdot e^{-10^{-3}\alpha(n+|m|)} \|v\| \\ \quad \|df_{f_x^m}^{-n} v\| \leq l \cdot e^{-n\alpha} \cdot e^{10^{-3}\alpha(n+|m|)} \|v\| \\ \textcircled{3} \gamma(f_x^m) \geq \bar{l} \cdot e^{-10^{-3}\alpha(n+|m|)} \\ \text{但, } \gamma(x) \text{ は } E_x^s \text{ と } E_x^u \text{ とのなす角度。} \end{array} \right\}$$

(注;  $10^{-3}$  には, “十分小さな正数” ぐらいの意味しかない.)

def.  $\Lambda_{\alpha, l}^k \equiv \{x \in \Lambda_{\alpha, l}; \dim E_x^s = k\}$ , (closed set,  $f$ -inv. とは限らない.)

$$\Lambda_{\alpha, l}^k \equiv \bigcup_{l \geq 1} \Lambda_{\alpha, l}^k \quad (f\text{-invariant になる})$$

$$\Lambda \equiv \bigcup_{\alpha, l, k} \Lambda_{\alpha, l}^k$$

次の事実が知られている;

①  $E_x^s, E_x^u$  は  $x \in \Lambda_{\alpha, l}^k$  に関して連続.

②  $\forall \mu$ ; non-zero Lyapunov exponents を持つ測度について,  $\mu(\Lambda) = 1$

さらに,  $\mu$  が ergodic なるば,  $\mu(\Lambda_{\alpha, l}^k) = 1$ . 但, “ $\alpha = 0$ ”

$$\alpha \equiv \min |x_i^\mu|, \quad k \equiv \sum_{k_i^\mu < 0} k_i^\mu.$$

(以上については, [P] を参照されたい.)

Main Lemma compact  $n$ -dim. riem. mfd  $M$ . と,  $C^{1+d}$ -diffeo.

$f: M \rightarrow M$  ( $d > 0$ ) について, 次の成立する;

$\forall k \in \{0, 1, \dots, s\}, \forall \alpha, \delta > 0, \forall l \geq 1$  について,  $\Psi = \Psi(k, \alpha, l, \delta)$  なる正数が存在して次をみたす;

$x \in \Lambda_{\alpha, l}^k$  が  $f^m x \in \Lambda_{\alpha, l}^k, d(x, f^m x) < \Psi \quad (\exists m \in \mathbb{Z})$  をみたすならば,  $z = z(x)$  なる点で次をみたすものが存在する;

- $$\left\{ \begin{array}{ll} \text{(i)} & f^m z = z, \\ \text{(ii)} & d_m^f(x, z) \equiv \max \{ d(f^i x, f^i z); 0 \leq i < m \} < \delta, \\ \text{(iii)} & z \text{ は双曲型周期点で, } z \text{ の local stable \&unstable\ mfd.} \end{array} \right.$$

は, admissible  $(s, 1)$ -[(u, 1)-] mfd. near  $x$  である。  
(定義 18 次節).

#### IV. 記号, 準備.

以後の節で使用する定義と性質を列挙する。性質の証明は殆ど, 「P」の方法が適用できる。

1°  $f$  のみによって定まる定数  $\delta_0 > 0$  が存在し, 任意の  $x \in \Lambda_{\alpha, l}^k$  のまわりの local chart として, euclidean space の  $x_0$ -ball からのもので, それによって  $f$  から induce される euclid. sp. 上の写像  $f_x$  が hyperbolic の様な条件をみたすものがある。詳しく言うと,  $\forall x \in \Lambda_{\alpha, l}^k$  について,  $\exists B(x) = \text{mhd. of } x$ ,  $\exists \Phi_x: B_{x_0}^k \times B_{x_0}^{n-k} \rightarrow B(x): \text{diffeo.}$  ( $B_{x_0}^*$  は  $\mathbb{R}^*$  の  $x_0$ -ball) s.t.

- (i)  $\forall y \in B(x)$  について,  $T_y M$  の riem. metric から induce される距離と,  $\Phi_x$  によって,  $\mathbb{R}^m$  の euclid. metric から induce される

距離とは、余り遠くない。(\*)

(ii)  $f_x \equiv \Phi_x^{-1} \circ f \circ \Phi_x : B_{x_0}^k \times B_{x_0}^{d-k} \rightarrow \mathbb{R}^n$  は次の形;

$$f_x(u, v) = (A_x u + h_{1x}(u, v), B_x v + h_{2x}(u, v)) \quad \begin{pmatrix} u \in \mathbb{R}^k \\ v \in \mathbb{R}^{d-k} \end{pmatrix}$$

但,  $\begin{cases} h_{1x}(0,0)=0, h_{2x}(0,0)=0, dh_{1x}(0,0)=0, dh_{2x}(0,0)=0 \\ A_x, B_x \text{ は行列で, } \|A_x\| < e^{-\frac{99}{100}x}, \|B_x\| < e^{-\frac{99}{100}x} \\ (\|\cdot\| \text{ は euclid. metric に関する norm}) \\ \exists M: \text{const}; \text{ s.t. } \|(dh_x)_{z_1} - (dh_x)_{z_2}\| < M \cdot \lambda(x) \cdot \|z_1 - z_2\|^d. \end{cases}$

$$\left( z \sim z', z = (u, v), h_x(z) = (h_{1x}(z), h_{2x}(z)), \lambda(x) = \max \left\{ \frac{1}{2}, e^{-\frac{99}{100}x} \right\} \right. \text{ とおいた。}$$

(即ち,  $f_x$  は hyperbolic の様な形をしている. ということ).

(iii) その他の付帯条件 (※).



2°  $x \in \Lambda_{x,2}^k$  について.  $(\delta > 0, \gamma > 0)$

$$\text{def } U_x^{\gamma, \delta, k} \equiv \left\{ \Phi_x(\text{graph of } \varphi); \varphi \in C^1(B_{h\varepsilon(x)}^{d-k}, B_{h\varepsilon(x)}^k) \right\} \\ \left\{ \|\varphi(0)\| \leq \delta, \|d\varphi(0)\| \leq \gamma \right\}$$

但,  $\varepsilon(x)$  は  $x$  から来る, 或る正定数,  $0 < \varepsilon \leq 1$ .

同様にして,  $S_x^{\gamma, \delta, k}$  も定義される。

$$\text{def } \varepsilon \equiv \inf \{ \varepsilon(x); x \in \Lambda_{x,2}^k \} > 0.$$

$$\lambda(x) \equiv \max \left\{ \frac{1}{2}, e^{-\frac{99}{100}x} \right\}, \quad \gamma(x) \equiv \frac{1}{20} (1 - \lambda(x))$$

(※); ~~~~~(※) 部分は, 詳しく書いても煩雑になるばかりなので簡単に書いた。詳しいことは論文を参照されたい。(以下同様)。

def  $N \in \mathcal{U}_x^{Y(x), \frac{1}{4}\epsilon, h}$  について,  $N \cap \Phi_x(B_{\frac{h\epsilon}{2}}^k \times B_{\frac{h\epsilon}{2}}^{\Delta-k})$   
admissible  $(u, h)$ -mfd. near  $x$  といふ。 admissible  
 $(s, h)$ -mfd. near  $x$  も定義される。

admissible  $(u, h)$ - $[(s, h)]$ -mfd は, 以下, local unstable.  
 $[(stable)]$  mfd の様な働きをする。  $\triangle$

3°  $h, \chi > 0, l \geq 1, \beta < \frac{1}{4}, 0 < h \leq 1$  について,  
 $x, y \in \Lambda_{\chi, l}^k$  が 十分に近く, さらに  $N \in \mathcal{U}_y^{4\beta Y(x), h\beta\epsilon, h}$  とな  
 るば,  $N \cap \Phi_x(B_{\frac{h\epsilon}{2}}^k \times B_{\frac{h\epsilon}{2}}^{\Delta-k})$  は admissible  $(u, h)$ -mfd.  
near  $x$  である。  $\triangle$

4°  $x \in \Lambda_{\chi, l}^k, 0 < h \leq 1$  について, 任意の admissible  
 $(s, h)$ -mfd near  $x$  と, 任意の admissible  $(u, h)$ -mfd.  
near  $x$  とは, 1点のみで交わり, かつ, その交わりは 横断  
的である。  $\triangle$

V. Main Lemma  $\Rightarrow$  主結果

Main Lemma を仮定して主結果 (I 節) を導く。

Th. A.;  $\forall x_0 \in \text{supp } \mu, \forall \epsilon > 0$  について,  $z \in \text{Per}(f)$  s.t.  
 $d(x_0, z) < \epsilon$  を見つければよい。

$\mu(A) = 1$  故,  $\exists h, l, \chi; \mu(B(x_0, \frac{\epsilon}{2}) \cap \Lambda_{\chi, l}^k) > 0$ .  $\psi =$   
 $\psi(h, \chi, l, \frac{\epsilon}{2}) \in \text{Main Lemma}$  に表われる正数とある。 $\therefore$   
 かつ,  $\exists B \subset B(x_0, \frac{\epsilon}{2}) \cap \Lambda_{\chi, l}^k; \text{diam } B < \psi$  かつ  $\mu(B) > 0$ .



Poincaré recurrence theorem により,  $\exists x \in B, \exists n(x) \in \mathbb{Z}^+$ ;  
 $f^{n(x)}(x) \in B \subset \Lambda_{n,l}^k$ . ところで,  $n$  を  $x$  とし,  $d(x, f^{n(x)}(x)) < \psi$   
 である。故に, Main Lemma を用いれば,  $\exists z \in \text{Per}(f); d(x, z)$   
 $< \frac{\varepsilon}{2}$ . ところで,  $d(x_0, z) \leq d(x_0, x) + d(x, z) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$   
 故, Th.A. が証明できた。 Th.A.

Th.B.; もしも,  $\forall i; \chi_i^\mu < 0$  とすると,  $f$  は, 大体, contraction  
 と考えられ, ergodicity により  $\text{supp } \mu = (\text{single periodic orbit})$  となり仮定に矛盾。 $\forall i; \chi_i^\mu > 0$  とおけば,  $f^{-1}$  を考  
 えることによって, 矛盾。故に,  $\exists i; \chi_i^\mu < 0 < \chi_{i+1}^\mu$  となる。  
 $\forall x_0 \in \text{supp } \mu, \forall \varepsilon > 0$  とする。ところで,  $\exists x_1, x_2 \in M$  s.t.  
 $x_1, x_2 \in B(x_0, \frac{\varepsilon}{4})$ ,  $\exists k, l; \forall \delta > 0; \mu(\Lambda_{k,l}^k \cap B(x_i, \delta)) > 0$   
 $(i=1,2)$ , かつ,  $d(x_1, x_2)$  は 十分近い。 Th.A. の証明と同様  
 にして,  $x_i$  に 十分近い hyperbolic periodic point  $z_i (i=1,2)$   
 がとれ, Main Lemma (iii) 及び IV.4° により,  $W^u(z_1) \cap$   
 $W^s(z_2) \neq \emptyset, W^u(z_2) \cap W^s(z_1) \neq \emptyset$ . このような状況が  
 あれば, Th.B. の主張が導かれることは, S. Smale が証明し  
 ている, [S]. Th.B.

Th.C.;  $0 < h(f) = \sup \{h_\mu(f); \forall \mu = \text{ergodic } f\text{-inv. Prob. meas.}\}$   
 故,  $\exists \mu = \text{ergodic } f\text{-invariant probability measure s.t.}$   
 $h_\mu(f) > 0$  かつ,  $\text{supp } \mu \neq (\text{single periodic orbit})$ .  
 $f$  の Lyapunov 数  $\chi_1^\mu \geq \chi_2^\mu$  とする。一般に, Margulis に

より, 次の結果が得られている。(1968年, unpublished).

$$\left[ \begin{array}{l} f: M^m \rightarrow M^m : C^1\text{-diffeomorphism, } \mu = \text{Borel prob. } f\text{-inv. meas.} \\ \text{について,} \\ h_\mu(f) \leq \int_M \chi^P(x) d\mu \quad \text{where } \chi^P(x) = \sum_{i: \chi_i(x) > 0} k_i(x) \chi_i(x). \end{array} \right.$$

これを用いた場合に適用すれば,  $0 < h_\mu(f) \leq \sum_{i: \chi_i^\mu > 0} \chi_i^\mu$ . 故に,  $\chi_1^\mu > 0$  である. 同様の議論を  $\bar{f}$  に適用すれば,  $\chi_2^\mu < 0$  なることが示される. 故に, Th. B. が適用できて, 証明が出来る. Th. C

Th. D. この定理の証明には,  $(n, \varepsilon)$ -spanning set を用いた  $h_\mu(f)$  の定義 (論文の第 I 章で述べられている) を必要とするため, ここでは省略する. Th. D

Th. E. (Th. D. を認めて, Th. E. を証明する.)  $h(f) = 0$  ならば, 証明すべきことはない.  $h(f) > 0$  とする.  $\forall \varepsilon > 0$  について,  $\exists \mu$ : ergodic measure s.t.  $h_\mu(f) > h(f) \cdot (1 - \varepsilon) > 0$ . このとき, Th. C. の証明と同様に,  $\chi_2^\mu < 0 < \chi_1^\mu$  とできるから, Th. D. により,

$$\limsup \frac{1}{n} P_n(f) \geq h_\mu(f) > h(f) \cdot (1 - \varepsilon).$$

$\varepsilon \rightarrow 0$  とすれば Th. E. が証明される. Th. E.

## VI. Main Lemma の証明の概略

適当な admissible  $(\rho, h)$ -mfd near  $x$  の族  $\{A_m\}_{m \geq 0}$ , 及び

admissible  $(u, h)$ -mfd. near  $x$  の族  $\{B_m\}_{m \geq 0}$  を構成し、  
 この (横断的な) 交点達の点列の極限として、求める hyperbolic  
 periodic point を得る。即ち、詳しく言えば次の様;

$$B_0 \equiv \Phi_x \left( \{0\} \times B_{\frac{h}{2}}^{\frac{d-k}{2}} \right). \quad \text{と置き, inductive に,}$$

$$B_0^i \equiv f \left( B_0^{i-1} \cap C(f^{i-1}x, h) \right) \quad (i=2, 3, \dots, n-1) \quad \text{と置く。}$$

$$\text{但 } C(x, h) \equiv \Phi_x \left( B_{h \in (x)}^k \times B_{h \in (x)}^{d-k} \right) \quad \text{for } x \in \Lambda_{x,2}^k.$$

よして,

$$B_1 \equiv f B_0^{n-1} \cap \Phi_x \left( B_{\frac{h}{2}}^k \times B_{\frac{h}{2}}^{d-k} \right).$$

(次々の図を参照)。

$B_0$  から  $B_1$  を構成したのと同様に, inductive に,  $B_m$  ( $m=1, 2, \dots$ )  
 を構成する。一方,  $f^{-1}$  を用いて,  $B_{\frac{h}{2}}^k \times \{0\}$  から, inductive  
 に,  $A_m$  ( $m=0, 1, 2, \dots$ ) を構成する。

このとき, 適当な条件のもとで (即ち,  $\psi$  etc. を小さくする  
 ことで,)  $\forall m=1, 2, \dots$ ;  $A_m$  は admissible  $(u, h)$ -mfd near  $x$   
 &  $B_m$  は admissible  $(u, h)$ -mfd near  $x$ . なることが証明で  
 きる。よって,

$$Z_{k,l} \equiv A_k \cap B_l$$

$$\text{と置く。 (NB: } f^m Z_{k,l} = Z_{k-1, l+1}).$$

このとき, IV. 1° 等を用いて, 次の2式が示される;

$$\textcircled{1} \dots \lim_{k \rightarrow \infty} d'_x(Z_{k, k-1}, Z_{k+1, k}) = 0$$

$$\textcircled{2} \dots \sum_{k=1}^{\infty} d'_x(Z_{k+1, k}, Z_{k, k-1}) < \infty.$$

(ここで,  $d_x^2$  は, euclidean metric を表わす.)

② 下り,

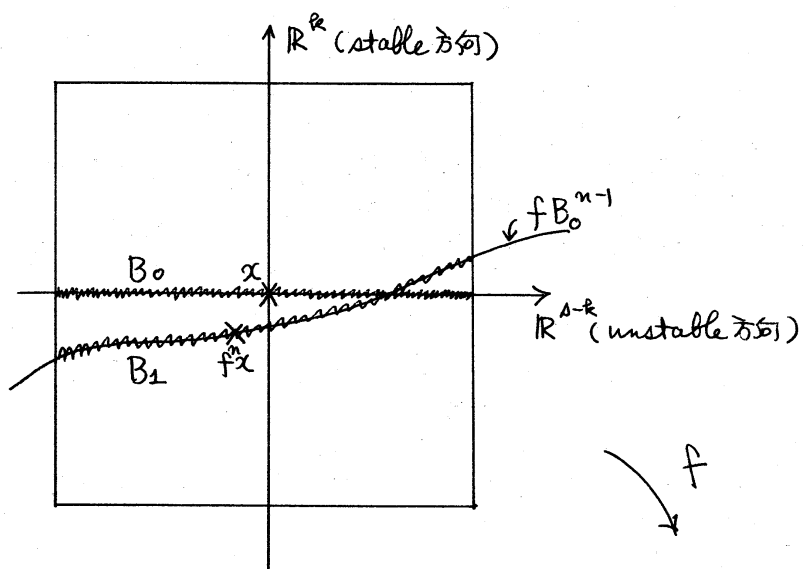
$$\exists \lim_k Z_{k, k+1} \Rightarrow Z.$$

このとき,

$$\begin{aligned} f^m Z &= f^m \left( \lim_k Z_{k, k+1} \right) = \lim_k (f^m Z_{k, k+1}) = \lim_k Z_{k+1, k} \\ &= \lim_k Z_{k, k+1} \quad (\text{ここで ① を用いる}) \\ &= Z \end{aligned}$$

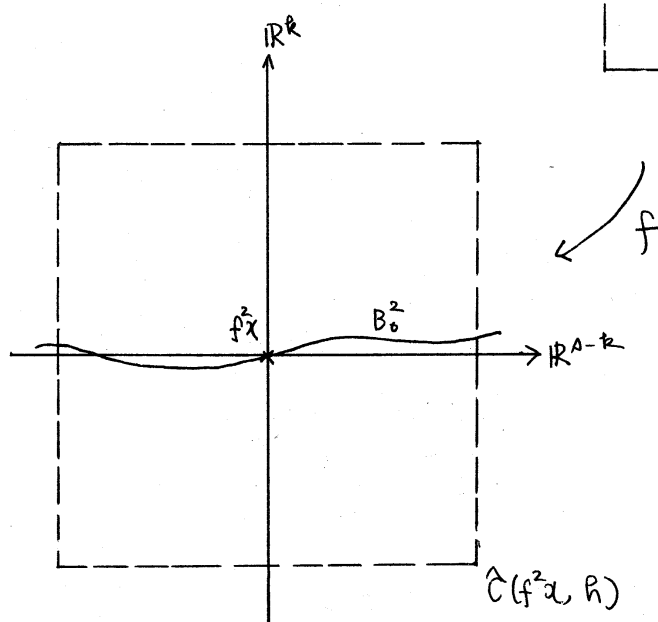
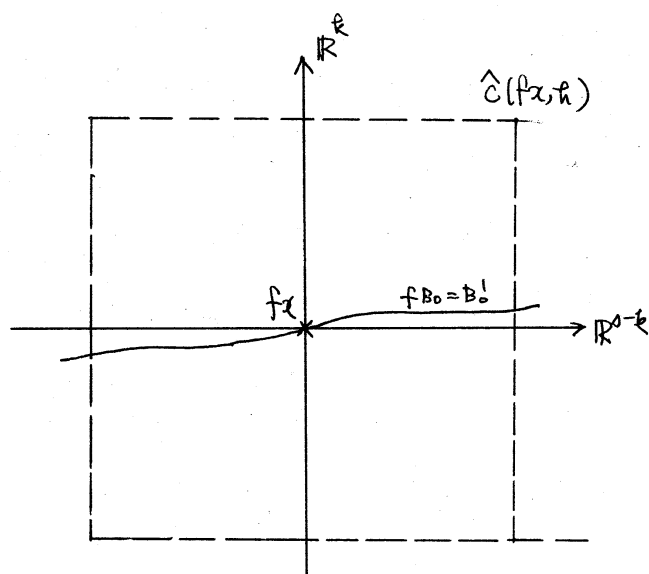
故, Main Lemma の (i) (ii) が示された。

さらに, より注意深く考察すれば,  $\exists \lim_m A_m$  がわかり, これが求まる local stable mfd となる。unstable mfd についても同様で, (iii) が示された。 Main Lemma



$f$

$f^{n-2}$



## REFERENCES.

- [P] Pesin, Ja. B., Families of invariant manifolds corresponding to non-zero characteristic exponents, *Math. of the USSR - Izvestija*, 10 (1976), 6, 1261-1305.
- , Characteristic Lyapunov exponents and smooth Ergodic theory, *Russian Math. Surveys*, 32 (1977), 4, 55-114.
- [O] Oseledec, V. I., Multiplicative ergodic theorem. Lyapunov characteristic numbers for dynamical systems, *Trans. Moscow Math. Soc.*, 19 (1968), 197-221.
- [S] Smale, S., *Diffeomorphisms with many periodic points*, *Diff. and Comb. Topology*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1965, 63-80.